

ЭВОЛЮЦИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДОСБОРА РЕКИ РАСТВОРИМОЙ ПРИМЕСЬЮ С ВЫСОКОЙ СКОРОСТЬЮ ДИФФУЗИИ

В работе предложена модель эволюции загрязнения поймы рек растворимой примесью с учетом сезонных явлений на поверхности водосбора. Рассмотрен случай сильно связываемых почвой примесей, т. е. удовлетворяющих условию $\tau_g, \tau_w \ll \tau_d$. Также исследуется случай, для которого указанное ограничение снято, но при этом примеси обладают высокой скоростью диффузии в грунт. Это означает, что мы не можем пренебрегать процессами диффузии даже в относительно короткие периоды паводков.

Для таких радиоактивных примесей, как Sr^{90} и Cs^{137} , значения коэффициентов диффузии достаточно высоки и для различных грунтов лежат в пределах от $D=2,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ до $D=7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$. Поскольку характерный размер поверхностного слоя почвы можно оценить величиной 0,1-0,15 м, то характерное время диффузии в почве, определяемое как $\tau_d = l^2/D$, имеет пределы от 1,5 до 45 с. Время омыwania почвы талой водой в период паводка имеет величину на несколько порядков выше величины характерного диффузионного времени. Это означает, что диффузией примеси в грунт во время паводка пренебрегать нельзя, а при описании диффузионных процессов можно использовать асимптотику больших времен: $t \gg \tau_d$.

Учитывая диффузионные члены в уравнениях, описывающих обмен примесью между водой и почвой в ловушках, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dc_p^l}{dt} + \frac{2D}{l^2} c_p^l &= \frac{2D}{l^2} c_g^l(0, t) , \\ \frac{dc_w^l}{dt} + \frac{q_0 f_w}{v_l} c_w^l + \frac{l f_l}{v_l} \frac{1}{\tau_w} c_w^l &= \frac{l f_l}{v_l} \frac{1}{\tau_g} c_g^l , \\ \frac{\partial c_g^l}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c_g^l}{\partial x^2} ,\end{aligned}$$

где c_p^l , c_w^l , c_g^l - концентрации примеси в почве, воде и грунте ловушек соответственно.

Граничные условия при этом следующие:

$$c_g^l(0, t) - 0,5l \frac{\partial c_g^l}{\partial t} = c_p^l(t), (x=0) ,$$

$$c_g^l(\infty, t) = 0 ,$$

а начальные условия таковы:

$$c_w^l(t_{10}^i) = 0 , c_p^l(t_{10}^i) = c_{p0}^h , c_g^l(t_{10}^i, x) = c_{20}^h(x) .$$

При записи первого уравнения этой системы использовано дополнительное предположение $\tau_g \ll \tau_w, \tau_p$, т.е. учтено, что концентрация примеси в почве в основном определяется процессом диффузии в грунт и практически не зависит от обмена примесью между почвой и водой. При тех же допущениях запишем систему уравнений для поймы реки:

$$\frac{dc_p^p}{dt} + \frac{2D}{l^2} c_p^p = \frac{2D}{l^2} c_g^p(0, t) + \frac{1}{\tau_w} c_w^r - \frac{1}{\tau_p} c_p^r ,$$

$$\frac{dc_w^r}{dt} + \frac{q_0 f_w}{v_r} c_w^r = \frac{q_0 f_w}{v_r} c_w^l, \quad \frac{\partial c_g^p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_g^p}{\partial x^2}.$$

Граничные условия при этом следующие:

$$c_g^p(0, t) - 0,5l \frac{\partial c_g^p}{\partial t} = c_g^p(t), \quad x = 0,$$

$$c_g^p(\infty, t) = 0, \quad x = \infty.$$

Начальные условия записываются следующим образом:

$$c_w^r(t_{10}^i) = 0, \quad c_p^r(t_{10}^i) = c_{p0}^r,$$

$$c_g^r(t_{10}^i, x) = c_{20}^r(x).$$

В первом уравнении системы имеется слагаемое, описывающее обмен примесью между водой и почвой, так как в данном случае вода является единственным источником загрязнения почвы и грунта.

Поскольку, рассматривая ловушки, обменом между почвой и водой мы пренебрегли, то нет смысла рассматривать возврат примеси из воды, захваченной ловушками.

Ориентируясь на летне-осенний период, получаем следующие уравнения для ловушек и поймы (верхний индекс опущен):

$$\frac{dc_p}{dt} + \frac{2D}{l^2} c_p = \frac{2D}{l^2} c_g(0, t),$$

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_g}{\partial x^2}.$$

Граничные условия остаются в прежнем виде, а начальные определяются по концу предыдущего периода. Уравнения, описывающие почву и грунт ловушек, в данном

приближении не зависят от других уравнений системы и не меняют вида при переходе от одного периода времени к другому. Поэтому их решение может быть записано сразу на весь период от начала процесса. При этом необходимо учитывать, что время зимних периодов должно удаляться из текущего времени, входящего в решение. Учитывая это замечание и принимая начальные условия в виде

$$c_p^I(t_{30}^0) = c_0, \quad c_g^I(t_{30}^0) = 0,$$

т.е. рассматривая момент смыва примеси в ловушки летними дождями после ее выпадения в области водосбора как начальный момент времени, получаем решение уравнения в виде, типичном для диффузионных процессов в асимптотике больших времен:

$$c_p^I \approx c_0 \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\tau_d/\pi},$$

$$c_g^I(t, x) \approx c_0 \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\tau_d/\pi} \exp\left(-\frac{x^2 \tau_d}{4l^2 t}\right).$$

Зависимость концентрации примеси в воде ловушек в периоды паводков в том же приближении имеет вид

$$c_w^I(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_0 \frac{lf_l}{v_l} \frac{\sqrt{\tau_d T_l}}{\tau_p} \exp\left(-\frac{t_{10}^i + t}{T_l}\right) \int_a^b \exp(z^2) dz.$$

Здесь в качестве характерного времени для процессов обмена в ловушках введена величина T_l , равная

$$T_l = \frac{v_l \tau_w}{lf_l + q_0 f_w \tau_w},$$

а пределы интегрирования составляют

$$a = \sqrt{\frac{t_{10}^i}{T_l}} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{t_{10}^i + t}{T_l}}.$$

Для концентрации воды в реке в приближении сильной диффузии получаем

$$c'_w(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_0 \frac{lf_i}{v_l} \frac{\sqrt{\tau_d T_r}}{\tau_p} \times \left\{ \exp\left(-\frac{q_0 f_w}{v_r} (t_{10}^i + t)\right) \int_c^d \exp(z^2) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{q_0 f_w}{v_r}} T_l \exp\left(-\frac{t_{10}^i + t}{T_l}\right) \int_a^b \exp(z^2) dz \right\},$$

где характерное время T_r равно

$$T_r = \frac{\tau_w^2 v_l^2 v_r q_0 f_w}{(q_0 f_w \tau_w (v_r - v_l) + lf_i v_r)^2},$$

а пределы интегрирования первого интеграла в предыдущем выражении составляют

$$c = \sqrt{\frac{q_0 f_w}{v_r} t_{10}^i} \quad \text{и} \quad d = \sqrt{\frac{q_0 f_w}{v_r} (t_{10}^i + t)}.$$

Зависимость концентрации воды от времени в данном приближении определяется функциями вида

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-a(t_0 + t)) \int_{\sqrt{at_0}}^{\sqrt{a(t_0+t)}} \exp(z^2) dz.$$

Имея в виду, что длительность паводка много меньше длительности летне-осеннего периода, можно использовать условие $t \ll t_0$. Разложив в ряд и грубо оценив интеграл, получаем примерный вид функции

$$f(t) \approx \frac{t}{2\sqrt{t_0}} \exp(-at).$$

Максимум эта функция достигает при $t = 1/a$. Ее график приведен на рис.1. Из него видно, что концентрация примеси в воде падает от паводка к паводку и обратно пропорциональна корню квадратному из отношения интервалов времени от "момента" выпадения примеси до "момента" начала соответствующего паводка, т. е.

$$\frac{c_w^r(t_1^{i+1})}{c_w^r(t_1^i)} = \sqrt{\frac{t_{10}^i}{t_{10}^{i+1}}}.$$

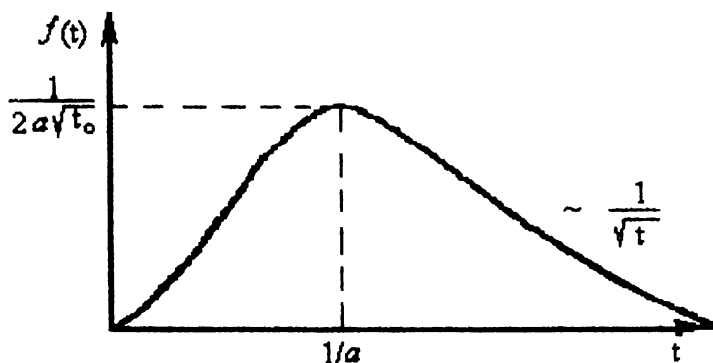


Рис.1. Качественный вид зависимости концентрации примеси в воде

Для уточнения хода временной зависимости концентраций примесей оценим полученные решения в двух предельных случаях. В случае больших времен $t \gg t_{10}^i, T_l, \nu_r / q_0 f_w, \tau_d$ решения совпадают и имеют вид

$$c_w^i(t) \approx c_w^r(t) \approx \sqrt{\frac{\tau_w}{\pi}} c_0 \frac{T_l}{\tau_p} \frac{f_l}{\nu_l} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

В противоположном пределе $t_{10}^i, T_l, \nu_r / q_0 f_w \gg t \gg \tau_d$ для концентрации примеси в воде ловушек имеем

$$c_w^i = c_0 \sqrt{\frac{\tau_d}{\pi}} \frac{f_l}{\nu_l} \frac{t}{\tau_p} \frac{1}{\sqrt{t_{10}^i}}.$$

Для концентрации примеси в воде реки в том же приближении получаем

$$c_w^r = c_0 \sqrt{\frac{\tau_d}{\pi}} \frac{l f_l}{v_l} \frac{q_0 f_w}{v_r} \frac{t^2}{\tau_p} \frac{1}{\sqrt{t_{10}^i}}.$$

Качественный вид временных зависимостей концентрации примеси в воде реки для двух последовательных паводков показан на рис.2.

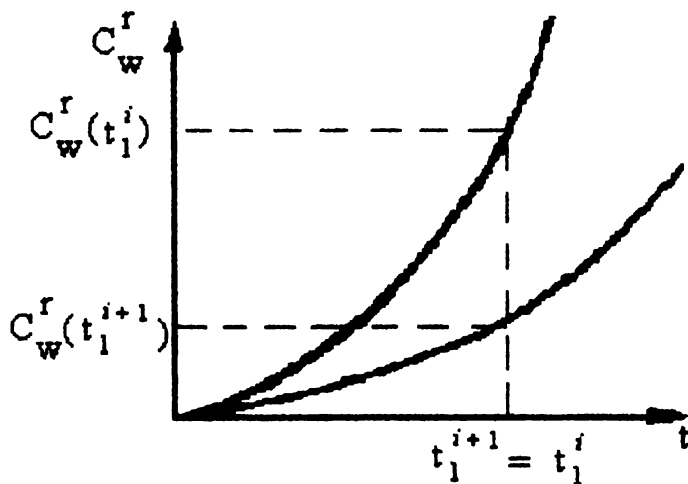


Рис.2. Зависимость концентрации примеси в воде реки от времени до начала паводка для i -го года и $(i+1)$ -го года

Наиболее характерной особенностью данного решения является темп убывания концентрации примеси по годам. Для двух последовательных паводков имеем

$$\frac{c_w^r(t_1^{i+1})}{c_w^r(t_1^i)} = \sqrt{\frac{t_{10}^i}{t_{10}^{i+1}}}$$

Анализ показывает, что время достижения кривой $c_w^r(t)$ максимума t_m определяется в основном двумя параметрами:

величиной $q_0 f_w / v_r$ и $T_{k\infty} = \lim T_l$ при $\tau_w \rightarrow \infty$, $T_{k\infty} = v_l / q_0 f_w$. Из оценки этих параметров следует, что величина $t_m \gg \tau_d$ и в то же время она соизмерима с длительностью паводка. Таким образом, концентрация примеси в воде реки в периоды паводков монотонно возрастает. Это согласуется с периодическим граничным условием, полученным на основе числовой модели, описывающей экспериментальные данные по диффузии примеси в грунт [1-3].

В заключение отметим, что нетрудно получить аналитические выражения для временной зависимости концентрации примеси в почве и грунте поймы реки, но они имеют громоздкий вид, а их начальные параметры зависят от решений предыдущего периода, что делает аналитическое описание трудоемким. В результате наиболее эффективным представляется объединение аналитического описания зависимостей $c_w^r(t)$ на основе феноменологического подхода и численного моделирования зависимостей концентрации примеси в пойме реки - $c_p^p(t)$ и $c_g^p(t, x)$.

Литература

1. Акинъшин В.Д., Набережная Е.П. Математический мониторинг радиационного загрязнения поймы реки // Хим. пром-сть. Вып. 3. Черкассы, 1993.
2. Акинъшин В.Д., Набережная Е.П., Калинин В.В. Модель распространения радионуклидов в пойме рек. Деп. в УкрНТЭИ. 26.01.83. № 60УК93.
3. Громов В. В., Набережная Е.П., Акинъшин В.Д. Диффузия примеси от источника с переменной концентрацией диффузанта // Физ. химия. 1994. Т.68. №7.